

# FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES



Classification Thèmes de MégaMaths

Docs de Dany-Jack MERCIER

Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

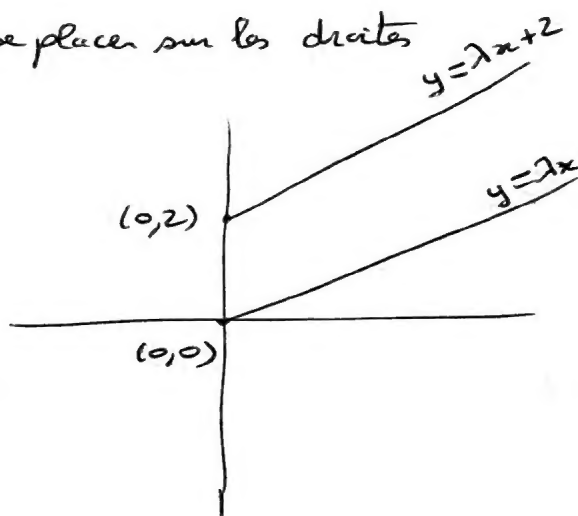
$$f(x, y) = \frac{x+y}{x} \text{ si } x \neq 0, \text{ et } f(0, y) = 1 \text{ si } x = 0.$$

La fonction  $f$  admet-elle une limite au point  $(0, 2)$ ? au point  $(0, 0)$ ?

Solution :

La réponse est négative. Il suffit de se placer sur les droites dessinées ci-contre et de écrire :

- $f(x, \lambda x + 2) = \lambda + 1 + \frac{2}{x}$   
qui n'admet pas de limite quand  $x \rightarrow 0$



- $f(x, \lambda x) = 1 + \lambda$  qui vérifie  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x, \lambda x) = 1 + \lambda$  mais dont la limite  $1 + \lambda$  varie suivant la pente de la droite  $y = \lambda x$  sur laquelle on s'est restreint.

Soit la fonction  $f$  définie par  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto f(x, y) = \cos \frac{\pi}{2}(x^2 + y^2)$ .  
Déterminer  $f(\mathbb{R}^2)$  et représenter soigneusement l'ensemble  $f^{-1}([0, 1])$  dans le plan muni d'un repère orthonormal.

-----  
Solution :

(1)

~~En 4 analyse 04 partiel~~

ufop0029

~~Partiel 114 Analyse - Mars 2004~~

(non utilisé en partiel en 2004)

$$\text{Ex 1) } f(\mathbb{R}^2) = [-1, 1]$$

$$\bullet (x, y) \in f^{-1}([0, 1])$$

 $\Leftrightarrow$ 

$$-\frac{\pi}{2} + k2\pi \leq \frac{\pi}{2}(x^2 + y^2) \leq -\frac{\pi}{2} + k2\pi + \pi$$

$$-1 + 4k \leq x^2 + y^2 \leq -1 + 4k + 2$$

$$4k - 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4k + 1$$

$$\text{donc } f^{-1}([0, 1]) = \bigcup_{k=0}^{+\infty} \mathcal{C}_k$$

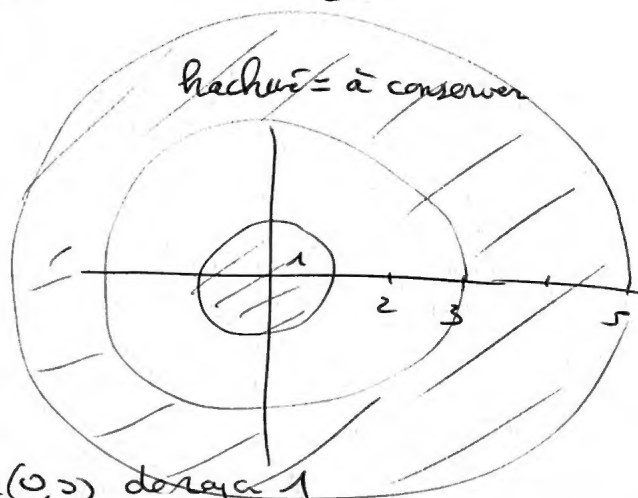
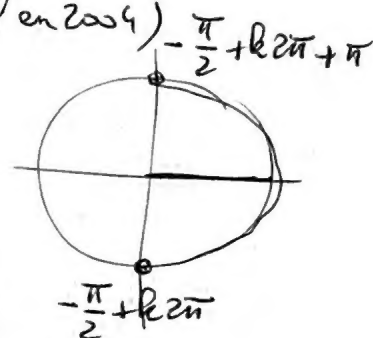
$$\mathcal{C}_k \equiv \pi^2$$

où  $\mathcal{C}_0 =$  disque  $\bar{B}(0, 1)$  fermé de centre  $(0, 0)$  de rayon 1

$\mathcal{C}_k =$  couronne fermée entre les cercles d'eq.  $x^2 + y^2 = 4k - 1$

et  $x^2 + y^2 = 4k + 1$ ,

quel que soit  $k \in \mathbb{N}^*$ .



~~td 06~~ ~~td 06~~ ~~td 06~~ Ex.1 : Montrer que les fonctions suivantes à valeurs réelles et définies sur  $(\mathbb{R}^2)^* \doteq \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$  sont différentiables sur  $\mathbb{R}^2$  mais que leurs dérivées partielles ne sont pas continues en  $(0,0)$  :

a)

$$\begin{cases} f(x,y) = xy \sin \frac{1}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ f(0,0) = 0 \end{cases}$$

b)

$$\begin{cases} f(x,y) = (x^2+y^2) \sin \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ f(0,0) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial y} &= x \sin \frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2xy^2}{(x^2+y^2)^2} \cos \frac{1}{x^2+y^2} \\ \frac{\partial f}{\partial x} &= y \sin \frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2x^2y}{(x^2+y^2)^2} \cos \frac{1}{x^2+y^2} \end{cases} \end{aligned}$$

Les dérivées partielles existent en tout point  $(x,y)$  distinct de  $(0,0)$ , et sont continues sur  $\mathbb{R}^{2*}$ . Donc  $f$  sera de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^{2*}$ .

$$\text{En } (0,0), \quad \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0 \end{cases}$$

\* Les dérivées partielles ne sont pas continues en  $(0,0)$  :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \underbrace{y \sin \frac{1}{x^2+y^2}}_{\rightarrow 0} - \underbrace{\frac{2x^2y}{(x^2+y^2)^2} \cos \frac{1}{x^2+y^2}}_{\doteq A(x,y)}$$

$$\text{Si } y=x, \quad A(x,x) = \frac{1}{2x} \cos \frac{1}{2x^2} \quad \text{et} \quad \cos \frac{1}{2x^2} = 1 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{8k\pi} \quad k \in \mathbb{N}^*$$

$$\text{Puisque, si l'on pose } x_k = \frac{1}{2\sqrt{k\pi}} \text{ où } k \in \mathbb{N}^*, \text{ on aura } \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x_k, x_k) = -\infty$$

et donc  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \neq (0,0)$

\* Différentiabilité de  $f$  en  $(0,0)$ :

Si oui,  $df(0,0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) dx + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) dy = 0$ . Voyons donc si:

$$f(h,k) - f(0,0) = hk \sin \frac{1}{h^2+k^2} = o(\|(h,k)\|)$$

ie si  $\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{hk}{\sqrt{h^2+k^2}} \sin \frac{1}{h^2+k^2} = 0$

On a bien  $\frac{hk}{\sqrt{h^2+k^2}} = \frac{(r \cos \theta)(r \sin \theta)}{r} = r \sin \theta \cos \theta \rightarrow 0 \quad (r \rightarrow 0)$

donc  $f$  est différentiable en  $(0,0)$ .

b) Même travail qu'a).

\* Aucun pb sur  $\mathbb{R}^2$ :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 \sin \frac{1}{|h|}}{h} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0 \end{cases}$$

On calcule si  $(x,y) \neq (0,0)$ :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \underbrace{2x \sin \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}}_{\rightarrow 0 \text{ si } (x,y) \rightarrow (0,0)} - \underbrace{x(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}} \cos \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}}_{\text{si } x=y>0, \text{ on obtient } \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \frac{1}{\sqrt{2}x} \text{ qui ne tend pas vers } 0 \text{ quand } x \rightarrow 0.}$$

$\frac{\partial f}{\partial x}$  n'est pas continue en  $(0,0)$ .

\*  $f$  est différentiable en  $(0,0)$  car

$$\frac{f(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = \sqrt{h^2+k^2} \sin \frac{1}{\sqrt{h^2+k^2}} \rightarrow 0 \quad (h,k) \rightarrow (0,0)$$

(FIN)

[tdfctpvr] Ex.4 : Etudier la continuité et la différentiabilité des fonctions suivantes :

a)

$$\begin{cases} f(x, y) = \frac{x|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ f(0, 0) = 0 \end{cases}$$

b)

$$\begin{cases} f(x, y) = \frac{x \sin y - y \sin x}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ f(0, 0) = 0 \end{cases}$$

c) Soit  $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ . On pose :

$$\begin{cases} f(x, y) = \frac{|xy|^\alpha}{x^2 - xy + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ f(0, 0) = 0 \end{cases}$$

Le seul problème éventuel est en  $(0, 0)$ .

$$a) \quad f(x, y) = \frac{e \cos \theta \cdot |e \sin \theta|}{e} = e \cos \theta \cdot |\sin \theta| \rightarrow 0 \quad (e \rightarrow 0)$$

donc  $f$  est continue en  $(0, 0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) \text{ donc si } f \text{ était différentiable, on}$$

aurait  $df(0, 0) = 0$ . On a :

$$\lim_{(h, k) \rightarrow (0, 0)} \underbrace{\frac{f(h, k)}{\sqrt{h^2 + k^2}}}_{\Delta} = \lim_{h, k} \frac{h|k|}{h^2 + k^2} \neq 0$$

$$\text{car si } h = k > 0, \quad \Delta = \frac{h^2}{2h^2} = \frac{1}{2}.$$

$$b) \quad x \sin y - y \sin x = x \left( y - \frac{y^3}{6} + o(y^3) \right) - y \left( x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \right) \quad (\text{au voisinage de } (0, 0))$$

$$= \frac{1}{6} (x^3 y - x y^3 + o(x y^3) - o(x^3 y))$$

$$(x) \quad = \frac{1}{6} (x^3 y - x y^3) (1 + \varepsilon(x, y)) \quad \text{avec } \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \varepsilon(x, y) = 0$$

$$\text{Ainsi : } f(x,y) = \frac{1}{6} \underbrace{\frac{x^3 y - x y^3}{x^2 + y^2}}_{\rightarrow 0 \text{ (}(x,y) \rightarrow (0,0) \text{)}} \underbrace{(1 + \varepsilon(x,y))}_{\rightarrow 1} \rightarrow 0$$

(faire  $x = \rho \cos \theta$  et  $y = \rho \sin \theta$ )

$f$  est donc continue en  $(0,0)$

• Différentiabilité en  $(0,0)$  :

$$\Delta \doteq \frac{f(h,k) - f(0,0)}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \frac{h \sin k - k \sin h}{(h^2 + k^2)^{3/2}} \rightarrow 0 \text{ (}(h,k) \rightarrow (0,0) \text{)} \quad ?$$

(\*) montre que

$$\Delta = \frac{1}{6} \underbrace{\frac{h^3 k - h k^3}{(h^2 + k^2)^{3/2}}}_{\doteq A} (1 + \varepsilon(h,k))$$

et si  $h = \rho \cos \theta$ ,  $k = \rho \sin \theta$  :

$$A(h,k) = \frac{\rho^4 (\cos^3 \theta \sin \theta - \cos \theta \sin^3 \theta)}{\rho^3} \rightarrow 0$$

$f$  est bien différentiable en  $(0,0)$

c)  $f(x,y) = \frac{|xy|^2}{x^2 - xy + y^2}$

•  $x^2 - xy + y^2 = 0$

$\Delta = -3y^2 \leq 0$ , donc si  $y \neq 0$ , pas de racine réelle, et si  $y = 0$ , s'annule si  $x = 0$ . Le dénominateur est non nul si  $(x,y) \neq (0,0)$ . Le numérateur est défini si  $xy \neq 0$ , donc :

$$\text{Def } f = \mathbb{R}^2 \setminus \{xy = 0\}.$$



$$\bullet f(x,y) = \frac{|e^{i\theta} \cos \theta \sin \theta|^\alpha}{e^2 (\cos^2 \theta - \cos \theta \sin \theta + \sin^2 \theta)} = \frac{e^{2(\alpha-1)} |\sin \theta \cos \theta|^\alpha}{1 - \sin \theta \cos \theta}$$

1) Si  $\alpha > 1$ ,  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0$  donc  $f$  est continue en  $(0,0)$

2) Si  $\alpha = 1$ ,  $f(x,y)$  prend plusieurs valeurs distinctes suivant  $\theta$ , donc  $f$  n'est pas continue en  $(0,0)$

3) Si  $0 < \alpha < 1$ ,  $\lim_{\rho \rightarrow 0} \rho^{2(\alpha-1)} = +\infty$  donc  $f$  n'est pas continue en  $(0,0)$

• Différentiabilité : Si  $\alpha \leq 1$ ,  $f$  n'est pas continue en  $(0,0)$

donc ne sera pas différentiable en ce point. Si  $\alpha > 1$ , et si  $df(0,0)$  existe, alors  $df(0,0) = 0$  (cf dérivées partielles  $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$ )

et il faut voir si :

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{f(h,k)}{\underbrace{\sqrt{h^2+k^2}}_{\triangle}} = 0$$

Comme précédemment :

$$\Delta = \frac{|hk|^\alpha}{(h^2+k^2)\sqrt{h^2+k^2}} = \frac{e^{2(\alpha-1)} |\sin \theta \cos \theta|^\alpha}{(1 - \sin \theta \cos \theta) e} = e^{2\alpha-3} \frac{|\sin \theta \cos \theta|^\alpha}{1 - \sin \theta \cos \theta}$$

1) Si  $2\alpha - 3 > 1$ , ie  $\alpha > 2$ ,  $f$  est différentiable en  $(0,0)$  car  $\lim \Delta = 0$

2) Si  $\alpha \leq 2$ ,  $f$  ne le sera pas car  $\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \Delta \neq 0$

~~Ex.3~~ **Ex.3 :** Voici deux exemples de fonction possédant des dérivées à l'origine suivant toutes les directions mais sans y être différentiable.

a) Soit

$$\begin{cases} f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ f(0, 0) = 0 \end{cases}$$

Vérifier que  $f$  possède une dérivée suivant toutes les directions en tout point de  $\mathbb{R}^2$ . On notera  $D_v f(x, y)$  la dérivée de  $f$  en  $(x, y)$  suivant la direction  $v$ .

Montrer que l'application  $v \mapsto D_v f(0, 0)$  n'est pas linéaire et en déduire que  $f$  n'est pas différentiable en  $(0, 0)$ .

b) Soit

$$\begin{cases} f(x, y) = \frac{x^3 y}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ f(0, 0) = 0 \end{cases}$$

Montrer que  $f$  possède une dérivée suivant toutes les directions en tout point de  $\mathbb{R}^2$ , que l'application  $v \mapsto D_v f(0, 0)$  est linéaire mais que pourtant  $f$  n'est pas différentiable en  $(0, 0)$  (On pourra considérer la restriction de  $f$  à la parabole  $y = x^2$ ).

a)  $D_v f(x, y) =$  dérivée de  $f$  en  $(x, y)$  suivant la direction  $v = (\alpha, \beta)$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + t\alpha, y + t\beta) - f(x, y)}{t}$$

•  $f$  admet des dérivées partielles continues en tout point de  $\mathbb{R}^{2*}$ , donc sera de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^{2*}$ . On sait que

(P)  $\left\| \begin{aligned} f \text{ différentiable en } (x, y) &\Rightarrow f \text{ admet une dérivée suivant la direction } v \text{ en } (x, y), \text{ pour tout } v, \text{ et} \\ &\nabla_v f(x, y) = df(x, y)(v) \end{aligned} \right.$

desorte que  $f$  admette des dérivées suivant n'importe quelle direction en tout point de  $\mathbb{R}^{2*}$ .

• Etude en  $(0,0)$  :

$$D_v f(0,0) \doteq \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t\alpha, t\beta) - f(0,0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \frac{(t\alpha)(t\beta)^2}{t^2\alpha^2 + t^2\beta^2} = \frac{\alpha\beta^2}{\alpha^2 + \beta^2}$$

existe bel et bien.

•  $v = (\alpha, \beta) \mapsto D_v f(0,0) = \frac{\alpha\beta^2}{\alpha^2 + \beta^2}$  n'est pas linéaire, donc  $f$  ne sera pas différentiable en  $(0,0)$  d'après (P) (en effet,  $df(x,y)$  est linéaire lorsqu'elle existe !)

b)  $f$  est  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ . En  $(0,0)$  :

$$\bullet D_v f(0,0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \cdot \frac{t^4 \alpha^3 \beta}{t^2(t^2 \alpha^4 + \beta^2)} = 0$$

•  $v \mapsto D_v f(0,0) = 0$  est linéaire. C'est l'appl. nulle.

• Cependant  $f$  n'est pas différentiable en  $(0,0)$  car si c'était le cas,  $df(0,0) = 0$  et l'on aurait

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{f(h,k)}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0$$

Calculons  $\Delta = \frac{f(h,k)}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \frac{h^3 k}{\sqrt{h^2 + k^2} (h^4 + k^2)}$  pour  $k = h^2$  :

$$\Delta(h, h^2) = \frac{h^5}{\sqrt{h^2 + h^4} \cdot 2h^4} = \frac{1}{2\sqrt{1+h^2}} \rightarrow \frac{1}{2} \quad \text{si } h \rightarrow 0_+$$

CFP)

Quel est l'ensemble de définition de la fonction  $f$  définie par

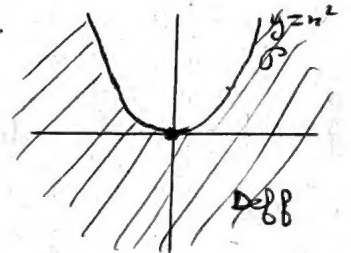
$$f(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - y}}$$

si  $x^2 + y^2 \neq 0$ , et  $f(0, 0) = 0$  ?

Rechercher les lignes de niveau de  $f$ .

- 1)  $x^2 - y > 0 \Leftrightarrow y < x^2 \Leftrightarrow M\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$  appartient à l'extérieur de la parabole  $\mathcal{P}: y = x^2$ .

Def  $f = \{ \text{extérieur de la parabole } \mathcal{P} \} \cup \{0\}$



- 2) Notons  $\Gamma_k = \{ M\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) / f(x, y) = k \}$  la ligne de niveau de  $f$  pour  $k$ .

$$f(x, y) = k \Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2 - y}} = k \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2}{x^2 - y} = k^2 \\ kx \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)x^2 \\ kx \geq 0 \end{cases} \quad (\text{si } k \neq 0)$$

montre que  $\Gamma_k$  sera la moitié de la parabole  $y = \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)x^2$  pour  $kx \geq 0$ , et lorsque  $k \neq 0$

NB: La parabole  $y = \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)x^2$  est toujours dans Def  $f$  puisque  $1 - \frac{1}{k^2} < 1$

\* Si  $k = 0$ ,  $\Gamma_0 = \{x = 0\} = \text{demi-droite } \{x = 0, y \leq 0\}$ .

Conclusion: Comme  $1 - \frac{1}{k^2} \geq 0 \Leftrightarrow |k| \geq 1$ , on distinguera

les cas :

$|k| > 1$  Demi-parabole :

$|k| = 1$   $\Gamma_1 : y = 0$  et  $x > 0$

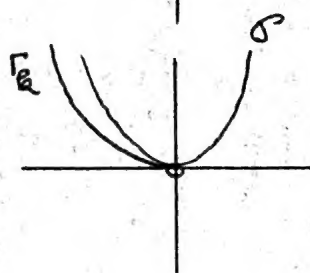
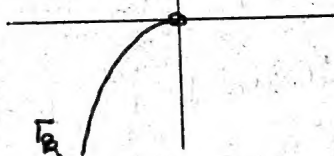
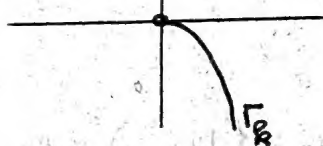
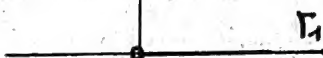
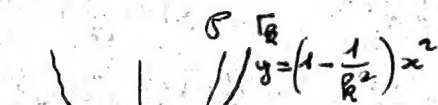
$0 < k < 1$   $\Gamma_k =$  demi-parabole :

$k = 0$   $\Gamma_0 : x = 0$  (et  $(\frac{x}{y}) \in \text{Def } f$ )

$-1 < k < 0$  Demi-parabole :

$k = -1$   $\Gamma_{-1} : y = 0$  et  $x < 0$

$k < -1$  Demi-parabole



**Exercice 2 :** Montrer que les applications suivantes sont différentiables en  $(0,0)$  et qu'elles admettent des dérivées partielles en  $(0,0)$  sans être différentiables en  $(0,0)$ .

a)

$$\begin{cases} f(x,y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y) \neq (0,0) \\ f(0,0) = 0 \end{cases}$$

b)

$$\begin{cases} f(x,y) = \frac{x^2y}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y) \neq (0,0) \\ f(0,0) = 0 \end{cases}$$

La différentiabilité de ces fonctions en  $(0,0)$  est en  $\mathbb{R}^2$  provient de la continuité des dérivées partielles continues en tout point  $(x,y)$  de  $\mathbb{R}^2$ .  
Montrons-le en  $(0,0)$ .

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0 \end{cases} \quad \text{calcul}$$

(on trouve différentiable en  $(0,0)$  en  $f(h,0) = (h,0) \Rightarrow (0,0,0)$ , i.e.

$$\lim_{(h,0) \rightarrow (0,0)} \frac{f(h,0)}{\sqrt{h^2+0}} = 0$$

$$a. \frac{f(h,0)}{\sqrt{h^2+0}} = \frac{h \cdot 0}{h^2+0} = 0 \text{ tend vers } 0 \text{ car } h \neq 0, h \rightarrow 0$$

et  $f$  n'est pas différentiable en  $(0,0)$

b) les dérivées partielles continues en  $(0,0)$  car

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{h^2}{h} \right) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{h^2}{h} \right) = 0 \end{cases}$$

Si  $f$  est différentiable en  $(0,0)$ , alors  $df(0,0) = dx - dy$ . Voyons donc si :

$$f(h,k) - h + k = 0 \quad (\|(h,k)\|)$$

ie si

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{h^2+k^2}} \left( \frac{h^3-k^3}{h^2+k^2} - h + k \right)}_{\doteq A(h,k)} = 0 \quad (*)$$

$$A(h,k) = \frac{hk(h-k)}{(h^2+k^2)^{3/2}}$$

Posez  $h = \rho \cos \theta$  et  $k = \rho \sin \theta$ .

$$A(h,k) = \sin \theta \cos \theta (\cos \theta - \sin \theta)$$

Ainsi, pour  $\theta = \frac{\pi}{6}$ ,  $A(h,k) = \frac{\sqrt{3}}{8} (\sqrt{3} - 1) \neq 0$ , et donc  $(*)$  est faux.

Cq :  $f$  n'est pas différentiable en  $(0,0)$